



Études préliminaires en vue d'un couplage océan-atmosphère bien couplé

Charles Pelletier, Eric Blayo, Florian Lemarié, Pascale Braconnot

► To cite this version:

Charles Pelletier, Eric Blayo, Florian Lemarié, Pascale Braconnot. Études préliminaires en vue d'un couplage océan-atmosphère bien couplé. 43e Congrès National d'Analyse Numérique, CANUM 2016, May 2016, Obernai, France. hal-01660567

HAL Id: hal-01660567

<https://inria.hal.science/hal-01660567>

Submitted on 14 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Études préliminaires en vue d'un couplage océan-atmosphère bien posé

Charles PELLETIER

supervisé par

Éric BLAYO

LJK, Univ. Grenoble-Alpes

Florian LEMARIÉ

LJK, Inria

Pascale BRACONNOT

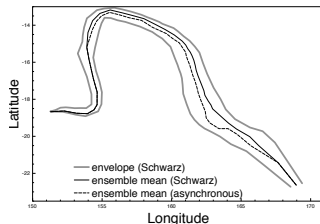
LSCE, CEA



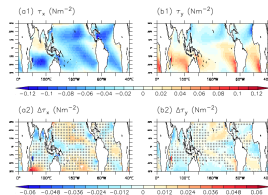
CANUM SMAI, Mai 2016 - Obernai

Contexte

- ▶ évolution climat : problématique scientifique mais aussi sociétale
- ▶ développement de modèles numériques globaux
- ▶ études préliminaires
→ importance du couplage
- ▶ versant math. de collaboration pluridisciplinaire
↳ LSCE (Saclay), LMD (Paris), LPOS (Brest)...



Lemarié et al., 2015



Gainusa-Bogdan 2015

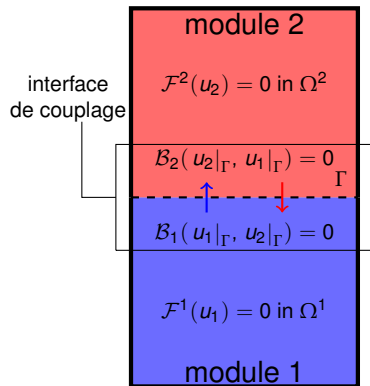
- 1 Généralités sur le couplage multiphysique
- 2 Spécificités mathématiques du couplage océan-atmosphère
- 3 La couche limite de surface
- 4 Un cas idéalisé
- 5 Un premier algorithme

- 1 Généralités sur le couplage multiphysique
- 2 Spécificités mathématiques du couplage océan-atmosphère
- 3 La couche limite de surface
- 4 Un cas idéalisé
- 5 Un premier algorithme

Couplage multiphysique

(u_1, u_2) état physique des domaines 1 et 2

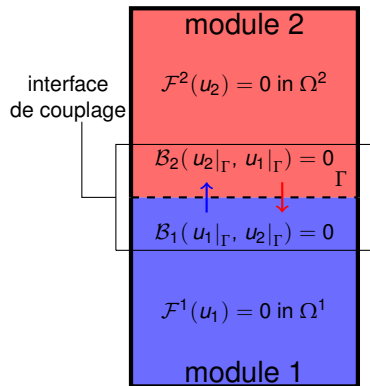
$(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2)$ opérateurs différentiels contenant la physique des 2 milieux



Couplage multiphysique

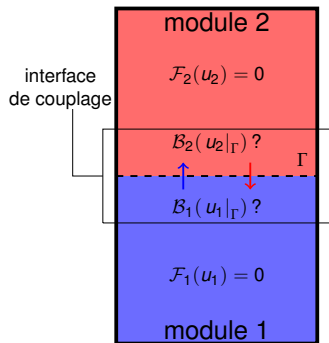
(u_1, u_2) état physique des domaines 1 et 2

$(\mathcal{F}^1, \mathcal{F}^2)$ opérateurs différentiels contenant la physique des 2 milieux



- ▶ absence de recouvrement inter-domaines
- ▶ conditions d'interface $\mathcal{B}_\alpha, \alpha \in \{1, 2\}$, issues de la physique
- ▶ non-conformités en espace et en temps

Méthode “Schwarz Waveform Relaxation” (SWR)



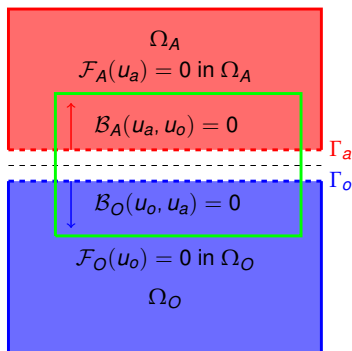
- ▶ opérateurs de transmission \mathcal{B}_α et \mathcal{H}_α , $\alpha \in \{O, A\}$.
- ▶ suite (u_1^k, u_2^k) , $k \in \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(u_1^k) = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ \mathcal{B}_1(u_1^k) = \mathcal{H}_1(u_1^{k-1}, u_2^{k-1}) & \text{sur } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_1 \end{cases}$$

idem pour 2

- ▶ peu intrusif, intuitif, parallélisable
- ▶ itératif \rightarrow optimisation des opérateurs \mathcal{B}_α et \mathcal{H}_α
- ▶ littérature math. florissante
- ▶ ... mais peu de résultats dans cas multiphysique (ex : Halpern, Japhet, Szeftel 2012)

Quelques spécificités du couplage océan-atmosphère



1. très multi-échelle :
2. nombreuses paramétrisations physiques, entre autres dans la “couche limite”
3. \exists résultats math. pour couplage (Lions et al. 1993), mais sans paramétrisations turbulentes ni stratification

- 1 Généralités sur le couplage multiphysique
- 2 Spécificités mathématiques du couplage océan-atmosphère**
- 3 La couche limite de surface
- 4 Un cas idéalisé
- 5 Un premier algorithme

Système d'équations primitives continu

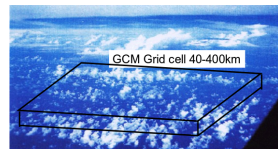
Navier Stokes en milieu tournant + Boussinesq + approximations standards

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + \nabla \cdot (\mathbf{U}u) - \nu_m \Delta u + (\partial_x p) / \rho_0 - 2\omega_z f v = 0 \\ \partial_t v + \nabla \cdot (\mathbf{U}v) - \nu_m \Delta v + (\partial_y p) / \rho_0 + 2\omega_z f u = 0 \\ (\partial_z p) + (\rho - \rho_0) g = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \\ \rho = \rho_\alpha(T, S, q, p), \alpha \in \{O, A\} \\ \partial_t \varphi + \nabla \cdot (\mathbf{U}\varphi) = \mu_\varphi \Delta \varphi + \mathcal{F}_\varphi \\ \varphi \text{ traceur} \in \{T, P, S, q\}. \end{array} \right.$$

| | | | |
|---------------|-----------------------|---------------|--------------------|
| ν_m | viscosité moléculaire | ω_z | rotation terrestre |
| f | facteur de Coriolis | ρ_0 | masse vol. de ref. |
| ρ_α | équations d'état | μ_φ | diffusivités |

Échelles turbulentes

Turbulence : rendre compte de leurs effets



Thompkins 2001

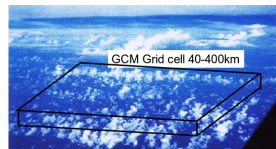
Échelles turbulentes

Turbulence : rendre compte de leurs effets

1. décomposition de Reynolds

$$X = \langle X \rangle + X' \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle X \rangle \text{ grandes échelles} \\ X' \text{ échelles } \textit{turbulentes} \end{array} \right.$$

2. remoyenner les “équations primitives” avec $\langle \cdot \rangle$



Thompkins 2001

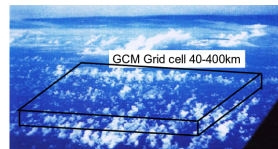
Échelles turbulentes

Turbulence : rendre compte de leurs effets

1. décomposition de Reynolds

$$X = \langle X \rangle + X' \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle X \rangle \text{ grandes échelles} \\ X' \text{ échelles } \textit{turbulentes} \end{array} \right.$$

2. remoyenner les “équations primitives” avec $\langle \cdot \rangle$



Thompkins 2001

Nouveaux termes dans l'advection :

$$\langle \partial_t X + \nabla \cdot (\mathbf{U} X) \rangle = \partial_t \langle X \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle \langle X \rangle) + \nabla \cdot \langle \mathbf{U}' X' \rangle, \quad \forall X$$

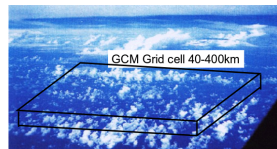
Échelles turbulentes

Turbulence : rendre compte de leurs effets

1. décomposition de Reynolds

$$X = \langle X \rangle + X' \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle X \rangle \text{ grandes échelles} \\ X' \text{ échelles } \textit{turbulentes} \end{array} \right.$$

2. remoyenner les “équations primitives” avec $\langle \cdot \rangle$



Thompkins 2001

Nouveaux termes dans l'advection :

$$\langle \partial_t X + \nabla \cdot (\mathbf{U} X) \rangle = \partial_t \langle X \rangle + \nabla \cdot (\langle \mathbf{U} \rangle \langle X \rangle) + \nabla \cdot \langle \mathbf{U}' X' \rangle, \quad \forall X$$

$$\Rightarrow \textbf{fermetures} : \quad \partial_z \langle w' X' \rangle = -\nu_z^X \langle X \rangle \\ + \text{CL turbulentes}$$

ν_z^X : viscosité turbulente

Fermetures turbulentes

Aux échelles climatiques :

- ▶ turbulence fortement anisotrope : verticale domine
- ▶ schéma num. rend bien compte des effets horizontaux de la turbulence. $\rightarrow \partial_x = \partial_y = 0$
- ▶ paramétrisations calibrées sur modèles 1D

Fermetures turbulentes

Aux échelles climatiques :

- ▶ turbulence fortement anisotrope : verticale domine
- ▶ schéma num. rend bien compte des effets horizontaux de la turbulence. $\rightarrow \partial_x = \partial_y = 0$
- ▶ paramétrisations calibrées sur modèles 1D

$$\partial_t \mathbf{u}_h - \partial_z (\nu \partial_z \mathbf{u}_h) = 0$$

$$\partial_t T + \partial_z (\mu \partial_z T) = 0$$

$$\text{CL } [\nu \partial_z \mathbf{u}_h]_\Gamma \text{ et } [\mu \partial_z T]_\Gamma$$

Fermetures turbulentes

Aux échelles climatiques :

- ▶ turbulence fortement anisotrope : verticale domine
- ▶ schéma num. rend bien compte des effets horizontaux de la turbulence. $\rightarrow \partial_x = \partial_y = 0$
- ▶ paramétrisations calibrées sur modèles 1D

$$\partial_t \mathbf{u}_h - \partial_z (\nu \partial_z \mathbf{u}_h) = 0$$

$$\partial_t T + -\partial_z (\mu \partial_z T) = 0$$

$$\text{CL } [\nu \partial_z \mathbf{u}_h]_\Gamma \text{ et } [\mu \partial_z T]_\Gamma$$

Difficulté : Turbulence active sur

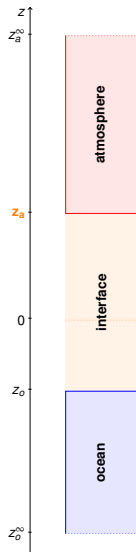
- ▶ conditions aux limites
- ▶ paramétrisation viscosités et diffusivités turbulentes

$\nu, \mu, [\nu \partial_z \mathbf{u}_h]_\Gamma, [\mu \partial_z T]_\Gamma ?$

Plan

- 1 Généralités sur le couplage multiphysique
- 2 Spécificités mathématiques du couplage océan-atmosphère
- 3 La couche limite de surface**
- 4 Un cas idéalisé
- 5 Un premier algorithme

Variables étoilées



Flux turbulent constant dans CLS $\rightarrow (u^*, \theta^*)$ telles que :

$$|\langle w' u_h' \rangle_\Gamma| = u^{*2}, \quad \langle w' T' \rangle_\Gamma = u^* \theta^*$$

Au voisinage de l'interface :

$$\partial_t u - \partial_z (\nu \partial_z u) = 0$$

$$\nu = \nu(u^*, z)$$

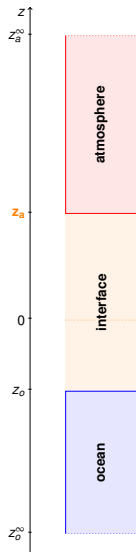
$$\nu \partial_z u|_{z_a} = u^{*2}$$

$$\partial_t T - \partial_z (\mu \partial_z T) = 0$$

$$\mu = \mu(u^*, \theta^*, z)$$

$$\mu \partial_z T|_{z_a} = u^* \theta^*$$

Variables étoilées



Flux turbulent constant dans CLS $\rightarrow (u^*, \theta^*)$ telles que :

$$|\langle \mathbf{w}' \mathbf{u}_h' \rangle_\Gamma| = u^{*2}, \quad \langle \mathbf{w}' T' \rangle_\Gamma = u^* \theta^*$$

Au voisinage de l'interface :

$$\partial_t u - \partial_z (\nu \partial_z u) = 0$$

$$\nu = \nu(u^*, z)$$

$$\nu \partial_z u|_{z_a} = u^{*2}$$

$$\partial_t T - \partial_z (\mu \partial_z T) = 0$$

$$\mu = \mu(u^*, \theta^*, z)$$

$$\mu \partial_z T|_{z_a} = u^* \theta^*$$

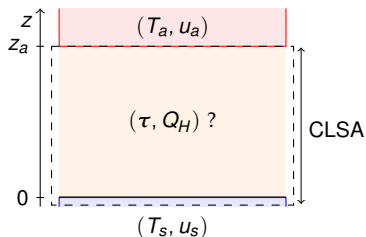
(u^*, θ^*) interviennent :

1. dans les conditions de bord en z_a ;
2. pour paramétrer ν et μ (sur une région étendue).

calcul de ces échelles turbulentes « étoilées » ?

Calcul de (u^*, θ^*)

dans l'atmosphère seule



Monin-Obukhov (1954) : stratification \hookrightarrow loi "log"
 τ et Q_H constants dans CLSA

$$\tau = \rho u^{*2} \frac{u_h}{|u_h|} \quad Q_H = \rho c_p u^* \theta^*$$

tel que :

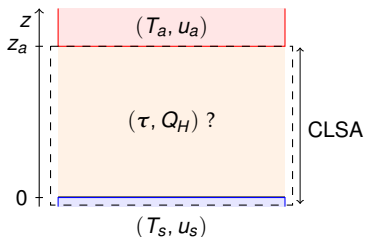
$$\begin{aligned} u^{*2} &= C_D(\delta u, \zeta) \times (\delta u)^2 \\ u^* \theta^* &= C_H(\delta u, \zeta) \times (\delta u) (\delta T) \end{aligned} \quad (*)$$

où $\delta x := x(z_a) - x_s$, $\zeta = \zeta(u^*, \theta^*)$

C_D , C_H : " coefficients de transferts "

Calcul de (u^*, θ^*)

dans l'atmosphère seule



Monin-Obukhov (1954) : stratification \hookrightarrow loi "log"
 τ et Q_H constants dans CLSA

$$\tau = \rho u^{*2} \frac{u_h}{|u_h|} \quad Q_H = \rho c_p u^* \theta^*$$

tel que :

$$\begin{aligned} u^{*2} &= C_D(\delta u, \zeta) \times (\delta u)^2 \\ u^* \theta^* &= C_H(\delta u, \zeta) \times (\delta u) (\delta T) \end{aligned} \quad (*)$$

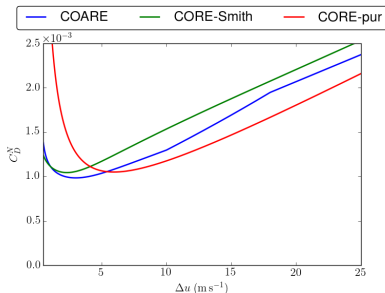
où $\delta x := x(z_a) - x_s$, $\zeta = \zeta(u^*, \theta^*)$

C_D , C_H : " coefficients de transferts "

(*) = problème "bulk" (compliqué)

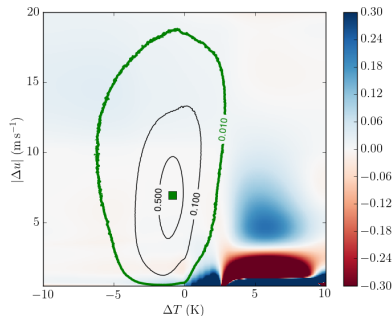
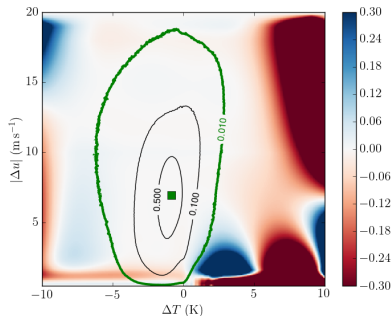
1. lent (itératif)
2. pas de forme explicite
3. sensible aux choix

étude math. très difficile avec les bulks actuelles



Approximation des bulks

“Fit” régulier, explicite, adapté aux configurations physiques fréquentes



erreur relative fit / bulk

- 1 Généralités sur le couplage multiphysique
- 2 Spécificités mathématiques du couplage océan-atmosphère
- 3 La couche limite de surface
- 4 Un cas idéalisé**
- 5 Un premier algorithme

Cas couplé avec paramétrisations sous-maille

1. cas non stratifié : T homogène, $\theta^* = 0$
2. τ constant au travers de l'interface :

$$u_a^* = u^*, \quad u_o^* = \lambda u^* \text{ avec } \lambda := \sqrt{\rho_a / \rho_o}$$

3. stationnaire : $\partial_t = 0$
4. vents zonaux seulement, $\mathbf{u}_h = (u, 0)$

Cas couplé avec paramétrisations sous-maille

1. cas non stratifié : T homogène, $\theta^* = 0$
2. τ constant au travers de l'interface :

$$u_a^* = u^*, \quad u_o^* = \lambda u^* \text{ avec } \lambda := \sqrt{\rho_a / \rho_o}$$

3. stationnaire : $\partial_t = 0$
4. vents zonaux seulement, $\mathbf{u}_h = (u, 0)$

$$\begin{cases} \partial_z (\nu_a \partial_z u) = 0, & (z, t) \in]z_a; z_a^\infty[\times [0; T] \\ \partial_z (\nu_o \partial_z u) = 0, & (z, t) \in]z_o^\infty; z_o[\times [0; T] \end{cases} \quad (1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \rho_a \nu_a \partial_z u|_{z_a} &= \rho_o \nu_o \partial_z u|_{z_o} = \tau_x, & \begin{cases} u_o(z_o^\infty) = 0 \\ u_a(z_a^\infty) = u_t \end{cases} & \text{imposé} \\ \text{continuité du flux} & & & \\ \nu_a &= \nu_a \left(u^*, \frac{fz}{cu^*} \right) & \nu_o &= \nu_o \left(\lambda u^*, \frac{fz}{c\lambda u^*} \right) \end{aligned}$$

Condition de consistance

Objectif : trouver u^* tel que le problème soit bien posé.

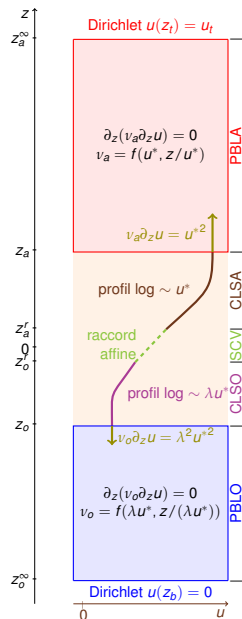
Idée : raccorder

1. évolution de la solution $\partial_z(\nu \partial_z u)$

$$\hookrightarrow u(z_a), u(z_o)$$

2. couche limite de surface :

$$u^{*2} = C_D [u(z_a) - u(z_o)]^2$$



Condition de consistance

Objectif : trouver u^* tel que le problème soit bien posé.

Idée : raccorder

1. évolution de la solution $\partial_z(\nu \partial_z u)$

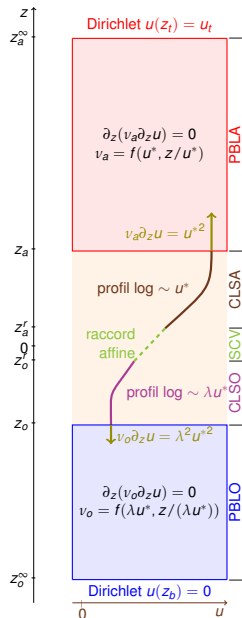
$$\hookrightarrow u(z_a), u(z_o)$$

2. couche limite de surface :

$$u^{*2} = C_D [u(z_a) - u(z_o)]^2$$

$$\frac{u^{*2}}{C_D} = \left[\delta \tilde{u} - u^{*2} \left(\int_{z_a}^{z_t} \frac{dz}{\nu_a \left(u^*, \frac{fz}{cu^*} \right)} + \lambda^2 \int_{z_b}^{z_o} \frac{dz}{\nu_o \left(\lambda u^*, \frac{-fz}{c\lambda u^*} \right)} \right) \right]^2$$

$$\delta \tilde{u} := u_t - u_b, \lambda := \sqrt{\rho_a / \rho_o} \text{ constantes connues.}$$



Plan

- 1 Généralités sur le couplage multiphysique
- 2 Spécificités mathématiques du couplage océan-atmosphère
- 3 La couche limite de surface
- 4 Un cas idéalisé
- 5 Un premier algorithme**

Séparation d'échelles

2 hypothèses simplificatrices :

- ▶ prendre C_D constant (pas un gros sacrifice)
 - ▶ **distinguer deux échelles** u^* :
 1. u_ν^* pour le calcul des ν
 2. u_{bc}^* pour les CL Neumann au bord de la CLS
- problème **nettement** simplifié

Idée : fixer u_ν^* a priori, puis trouver u_{bc}^* :

$$\frac{u_{bc}^{*2}}{C_D} = \left[\delta \tilde{u}^\infty - \frac{\mathcal{I}_a(u_\nu^*) + \lambda \mathcal{I}_o(\lambda u_\nu^*)}{\kappa u_\nu^*} u_{bc}^{*2} \right]^2 \quad (*)$$

\mathcal{I}_α sans unité : $\int_{\Omega_\alpha} \frac{d\sigma}{G(\sigma)}$.

(*) : éq. bicarrée de u_{bc}^* , soluble analytiquement

L'algorithme

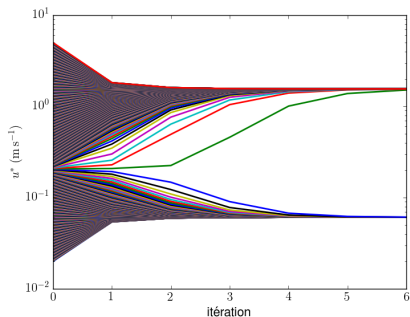
1. première échelle arbitraire $u_{\nu,0}^*$.
2. Pour $i \in \llbracket 0, n_{it} \rrbracket$:
 - 2.1 calcul (explicite) des $\mathcal{I}_\alpha(u_{\nu,i}^*)$.
 - 2.2 détermination de $u_{bc,i}^*(u_{\nu,i}^*)$ (équation bicarrée)
 - 2.3 profil complet de solutions, $u_i = u_i(u_{\nu,i}^*, u_{bc,i}^*, z)$:

$$u_i(z) = \begin{cases} u_t - u_{bc,i}^{*2} \int_z^{z_a^\infty} \frac{dz}{v\left(u_{\nu,i}^*, \frac{z}{h_{pbl}(u_{\nu,i}^*)}\right)} & z \in]z_a; z_a^\infty[\\ \lambda^2 u_{bc,i}^{*2} \int_{z_0^\infty}^z \frac{dz}{v\left(\lambda u_{\nu,i}^*, \frac{-z}{h_{pbl}(\lambda u_{\nu,i}^*)}\right)} & z \in]z_0^\infty; z_0[\end{cases}$$

- 2.4 nouvelle valeur $u_{\nu,i+1}^*$:

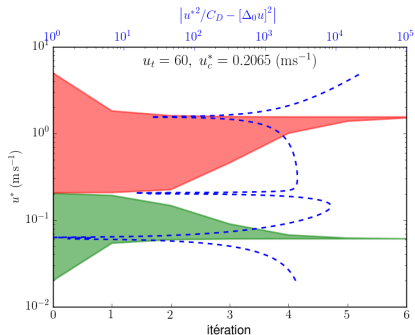
$$u_{\nu,i+1}^* := u_{bc,i}^* = \sqrt{C_D} [u_i(z_a) - u_i(z_0)]$$

Résultats numériques

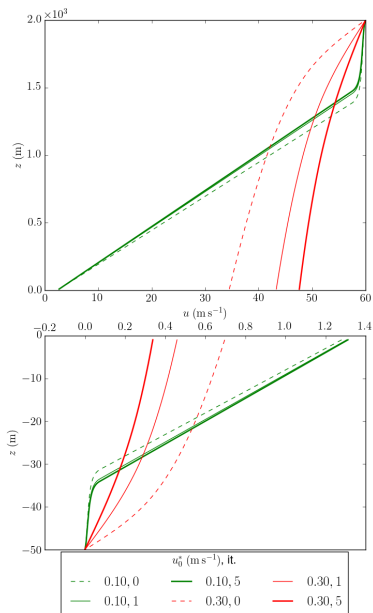


- ▶ dépendance forte en u_0^* ;
- ▶ converge vers 2 puits ;
- ▶ une valeur critique

Résultats numériques



- dépendance forte en u_0^* ;
- converge vers 2 puits ;
- une valeur critique



- ▶ cas stationnaires
- ▶ ... et stratifiés
- ▶ mise en place d'un cadre théorique pour l'étude de problèmes de couplage avec paramétrisations